Abiturprüfungen
aus Südtirol

# Maturaprüfung 2013

Diese Prüfungsaufgaben gelten in ganz Italien.
Hier finden Sie die deutsche Übersetzung für Südtirol
und im Anhang die Originalausgabe in Italienisch.

Stand 19. Dezember 2016

Text Nr. 76131

**FRIEDRICH W. BUCKEL**

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

# Vorwort

Die vorliegenden Prüfungsaufgaben wurden vom italienischen Unterrichtsministerium für das **Liceo Scientifico** erstellt. Für Südtirol gibt es für die **Realgymnasien** eine deutsche Übersetzung. Ich füge beide Originale (als Kopien) diesem Text bei. Die Lösung wurde allein von mir erstellt.

Es gibt eine weitere Abituraufgabe für Experimentalkurse (Corso Sperimentale P.N.I).
Man findet sie demnächst im Text 76132.

# Inhalt

Pag. 1/3

Ordentlicher Termin 2013
Zweite schriftliche Prüfung

*Ministero dell' Istruzione, dell' Università e della Ricerca*

**H557 - ABSCHLUSSPRÜFUNG AN REALGYMNASIEN**

**Arbeit aus:** MATHEMATIK

***Lösen Sie eine der beiden folgenden Problemstellungen und 5 der 10 gestellten Fragen***

***PROBLEMSTELLUNG 1***

Die Funktion $f$ ist definiert durch $f(x)=\int_0^x\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt$ mit x eine reelle Zahl und $0\le x\le 9$.

1. Berechnen Sie $f'(\pi)$ und $f'(2\pi)$ mit $f'$ erste Ableitung von $f$.
2. Stellen Sie den Graf $\Sigma$ von $f'(x)$ in einem kartesischen Koordinatensystem dar und schließen Sie daraus, für welchen oder welche Werte von $x$, $f(x)$ Maxima oder Minima aufweist. Stellen Sie außerdem den Graf von $f(x)$ dar, indem Sie dabei vom Graf von $f'(x)$ ausgehen.
3. Bestimmen Sie den Mittelwert von $f'(x)$ im Intervall $[0,2\pi]$.
4. Der ebene Bereich R, der von $\Sigma$ und der x-Achse für $0 \le x \le 4$ begrenzt wird, ist Grundfläche eines Körpers W, dessen Schnittflächen mit Ebenen, die senkrecht zur $x$-Achse stehen, für alle $x$ die Fläche $A(x)=3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ besitzen. Berechnen Sie das Volumen des Körpers W.

***PROBLEMSTELLUNG 2***

Die Funktion $f$ ist für alle reellen Zahlen $x$ definiert durch $f(x)=\frac{8}{4+x^2}$

1. Untersuchen Sie die Funktion $f$ und zeichnen Sie den Graf $\Phi$ in einem kartesischen Koordinatensystem $OXY$. Geben Sie die Gleichungen der Tangenten an $\Phi$ in den Punkten $P(-2;1)$ und $Q(2;1)$ an. Betrachten Sie das konvexe Viereck, das diese Tangenten mit den Geraden $OP$ und $OQ$ bilden. Beweisen Sie, dass dieses Viereck ein Rhombus ist und berechnen Sie die Größe seiner Winkel in Grad und Minuten (sexagesimale Darstellung).
2. Es sei $\Gamma$ der Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt (0;1). Eine Gerade $t$, die durch den Ursprung $O$ geht, schneidet $\Gamma$ im Ursprung und in einem Punkt $A$ und schneidet die Gerade mit der Gleichung y = 2 in einem Punkt $B$. Zeigen Sie, dass für jede Gerade $t$ die Abszisse $x$ von $B$ und die Ordinate $y$ von $A$ die Koordinaten $(x;y)$ eines Punktes von $\Phi$ sind.
3. R sei der von $\Phi$ und der $x$-Achse über dem Intervall [0, 2]eingeschlossene ebene Bereich. Beweisen Sie, dass R flächengleich mit dem Kreis $\Gamma$ ist. Zeigen Sie außerdem, dass der von $\Phi$ und der gesamten $x$-Achse eingeschlossene Bereich äquivalent der vierfachen Kreisfläche ist.
4. Der Bereich R erzeugt durch Rotation um die $y$-Achse einen Körper W. Geben Sie das bestimmte Integral an, mit dem das Volumen von W berechnet werden kann und begründen Sie es. Sie brauchen das Integral nicht berechnen!

Pag. 2/3

Ordentlicher Termin 2013
Zweite schriftliche Prüfung

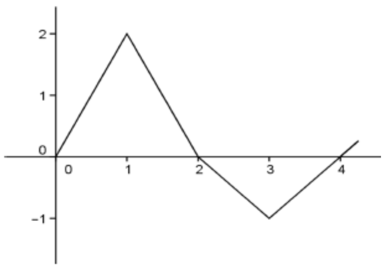
*Ministero dell' Istruzione, dell' Università e della Ricerca*

**H557 - ABSCHLUSSPRÜFUNG AN REALGYMNASIEN**

**Arbeit aus:** MATHEMATIK

***LISTE DER FRAGEN***

1. Ein Dreieck hat Flächeninhalt 3 und zwei Seiten der Länge 2 und 3. Wie lang ist die dritte Seite? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Berechnen Sie den Definitionsbereich der Funktion $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}}$
3. In einem ebenen kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(2; -1) und B(-6;-8) gegeben. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die durch B geht und maximalen Abstand von A hat.
4. Von einem geraden Pyramidenstumpf mit quadratischer Grundfläche kennt man die Höhe h und die Seiten a und b der Grund- und Deckfläche. Drücken Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes in Abhängigkeit von a, b und h aus und legen Sie die angestellten Überlegungen dar.
5. In einem Buch steht: *"Zwei Koffer der gleichen Form, deren Ausmaße sich nur geringfügig unterscheiden, scheinen "fast das gleiche" Fassungsvermögen zu haben. Es ist fraglich, ob sich Personen bewusst sind, dass eine Vergrößerung der Ausmaße (Länge, Breite, Höhe) um 10% (oder 20% oder 25%) eine Vergrößerung des Fassungsvermögens (Volumens) um ungefähr 33% (oder 75% oder 100%: Verdoppelung) bewirkt."* Ist dem so? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.
6. Mit den Ziffern von 1 bis 7 ist es möglich 7! = 5040 verschiedene Zahlen zu bilden. Dies entspricht der Anzahl der Permutationen der 7 Ziffern, die beiden Zahlen 1234567 und 3546712 sind zwei Beispiele dieser Permutationen. Wenn man die 5040 erhaltenen Zahlen der Größe nach aufsteigend ordnet, welche Zahl steht dann an der siebten und welche an der 721. Stelle?
7. Ein rechteckiges Blatt mit den Maßen $a$ und $b$ hat eine Fläche von $1\,\text{m}^2$. Halbiert man das Blatt indem man es parallel zur kürzeren Seite teilt, so erhält man zwei, zum Ausgangsrechteck ähnliche Rechtecke. Welches sind die Maße $a$ und $b$?
8. Die Funktion $f$ hat den in der nebenstehenden Abbildung dargestellten Graf. Es sei $g(x)=\int_0^x f(t)dt$. Für welchen positiven Wert von $x$ besitzt g ein Minimum? Legen Sie die angestellten Überlegungen dar.




9. Berechnen Sie:

$$\lim_{x\to 0} 4\frac{\sin x\cos x-\sin x}{x^2}$$

Pag. 3/3

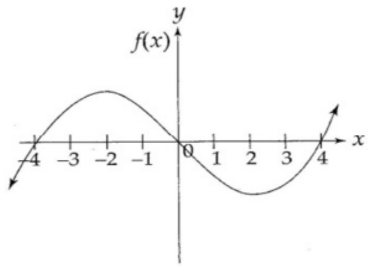
Ordentlicher Termin 2013
Zweite schriftliche Prüfung

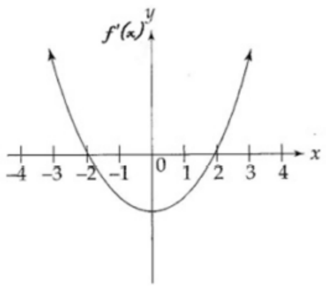
*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

# H557 - ABSCHLUSSPRÜFUNG AN REALGYMNASIEN

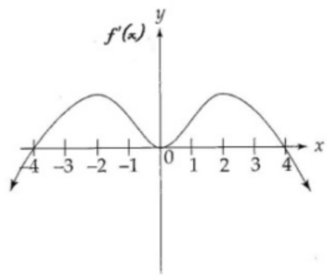
**Arbeit aus:** MATHEMATIK

10. Nebenstehende Abbildung stellt den Graf von $f(x)$ dar. Welcher der folgenden Grafen könnte jener von $f'(x)$ sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

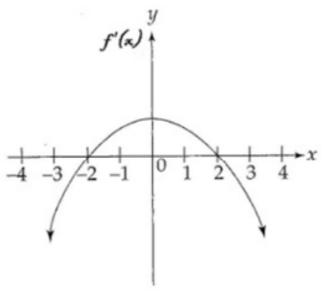


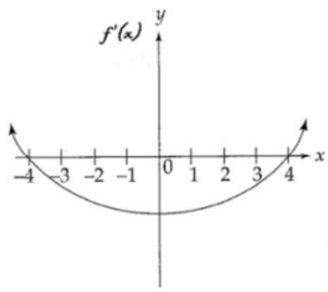

A)




C)




B)




D)

---

Dauer der Arbeit: 6 Stunden.
Es ist nur die Benützung eines nicht programmierbaren Taschenrechners erlaubt.
Der Gebrauch eines zweisprachigen Wörterbuchs (Deutsch – Sprache des Herkunftslandes) ist für die Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund erlaubt.
Das Schulgebäude darf erst drei Stunden nach Bekanntgabe des Themas verlassen werden.

# Lösung Aufgabe 1 (Problemstellung 1)

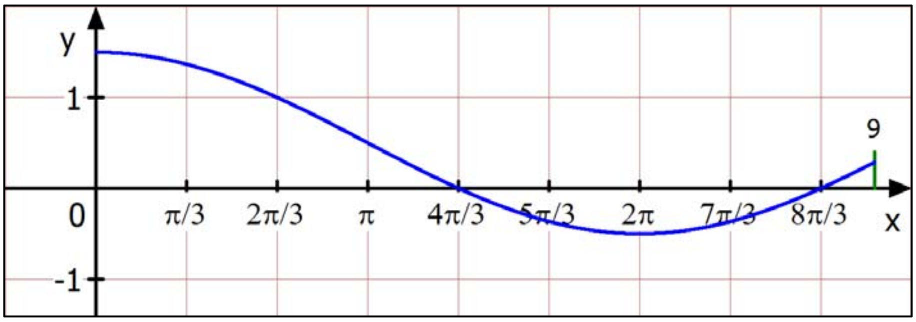
Die Funktion *f* ist definiert durch $f(x)=\int_0^x\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt$ für alle reellen Zahlen x mit $0\le x\le 9$ .

1. Berechnen Sie $f'(\pi)$ und $f'(2\pi)$ mit $f'$ als erster Ableitung von f.

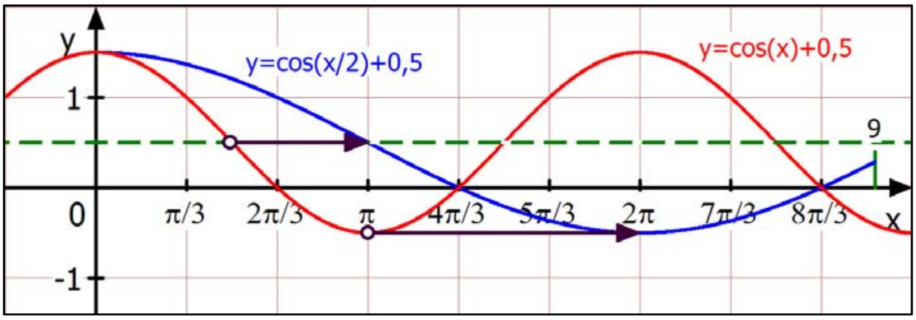
Da f als Integralfunktion definiert ist, gilt $f'(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}$.

Also folgt: $f'(\pi)=\underbrace{\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)}_{0}+\frac{1}{2}$ und $f'(2\pi)=\cos(\pi)+\frac{1}{2}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

2. Stellen Sie den Graf $\Sigma$ von $f'$ in einem kartesischen Koordinatensystem dar und schließen Sie daraus, für welchen oder welche Werte von x, f(x) Maxima oder Minima aufweist.




Hinweis: Der Graf von $f'$ entsteht aus $y=\cos(x)$ durch Dehnung in x-Richtung mit dem Faktor 2 und anschließender Verschiebung um $\frac{1}{2}$ in y-Richtung.
Dies zeigt die folgende Abbildung: Zwei Punkte der nicht gestreckten aber verschobenen Kosinuskurve wurden in x-Richtung gestreckt (schwarze Pfeile).




**Bestimmung der Extremwerte von f aus der Abbildung von f':**

Als Integralfunktion von $f'$ stellt $f$ Flächeninhalte dar. Flächen oberhalb der x-Achse erhalten bei der Integration einen positiven Wert, liegen sie unterhalb der x-Achse, dann einen negativen. Die Werte von f wachsen also bis zur Nullstelle $x_N=\frac{4}{3}\pi$ von $f'$ an. Dort hat also f ein Maximum. Dann verkleinert sich f(x) wieder. Der Flächeninhalt ist jedoch nie negativ, weil die Fläche unter der x-Achse wegen der Verschiebung um 0,5 nach oben immer kleiner ist, als die über der x-Achse. Auf Grund der Definition ist f(x) = 0 (obere Grenze = untere Grenze). Dort hat also f ein Minimum, sogar ein absolutes Minimum. Bei $x_N=\frac{8}{3}\pi$ liegt ein weiteres Minimum vor, da links und rechts davon die f(x)-Werte größer sind.

**Einschub:** ***Man kann die Extremwerte von f jedoch auch berechnen:***

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) + \tfrac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) = -\tfrac{1}{2}$

Mit Hilfe der Substitution $u = \tfrac{1}{2}x$ bedeutet dies $\cos(u) = -\tfrac{1}{2}$, was für $u_1 = \tfrac{2}{3}\pi,\ u_2 = \tfrac{4}{3}\pi$ passiert. Die Rücksubstitution liefert $x_1 = \tfrac{4}{3},\ x_2 = \tfrac{8}{3}\pi \approx 8{,}4$ .

Hinreichende Bedingung:

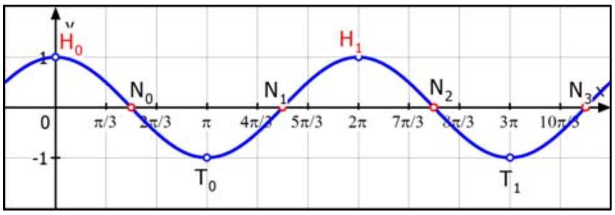
$f''(x) = -\tfrac{1}{2}\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)$

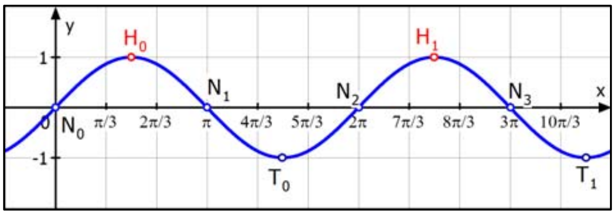
$f''\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cdot\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3} < 0$

$\Rightarrow$ Maximum

$f''\left(\tfrac{8}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cdot\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) > 0$

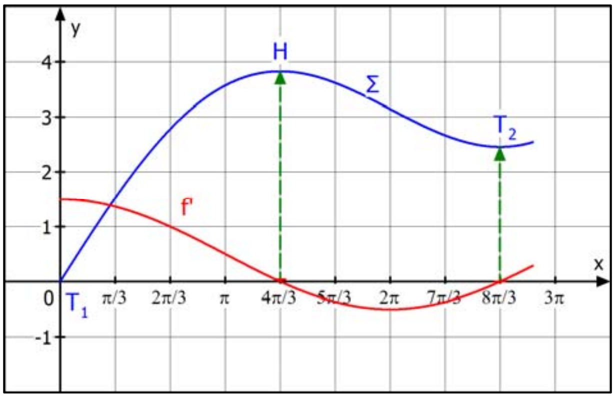
$\Rightarrow$ Minimum




Stellen Sie außerdem den Graf von f dar, indem Sie dabei vom Graf von $f'$ ausgehen.

3. Bestimmen Sie den Mittelwert von $f'(x)$ im Intervall $[0\,;2\pi\,]$ .



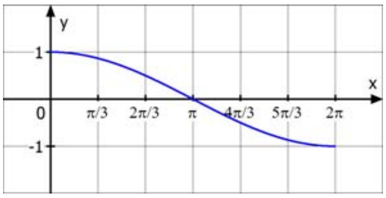

Die Formel für einen Funktionsmittelwert lautet:

$$\boxed{\overline{f'(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)\,dx}$$

Hier:

$$\overline{f'(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\right]dx = 0{,}5$$

***Begründung ohne Integration:*** Die Kurve $y = \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)$ schwankt um die x-Achse herum. Ihr Mittelwert ist daher im Intervall $[0\,;2\pi]$ gleich 0. Addiert man 0,5, dann ist der Mittelwert eben 0,5.




4. Der ebene Bereich R, der von $\Sigma$ und der x-Achse für $0 \le x \le 4$ begrenzt wird, ist Grundfläche eines Körpers W, dessen Schnittflächen mit Ebenen, die senkrecht zur *x*-Achse stehen, für alle *x* die Fläche $A(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ bilden. Berechnen Sie das Volumen des Körpers W.

Man muss die Querschnittsflächen (Scheiben der Dicke dx und der Fläche A(x) durch die Integration aufsummieren:

$$V = \int_0^4 A(x)\,dx = 3\int_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx = 3\cdot\left[\frac{-\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\frac{\pi}{4}}\right]_0^4 = \frac{12}{\pi}\cdot\left[\underbrace{-\cos(\pi)}_{=-1} + \underbrace{\cos(0)}_{=1}\right] = \frac{24}{\pi}\ \ (\mathrm{VE})$$

# Aufgabe 2 (Problemstellung 2)

Die Funktion $f$ ist für alle reellen Zahlen *x* definiert durch $f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$

1. Untersuchen Sie die Funktion f und zeichnen Sie den Graf $\Phi$ in einem kartesischen Koordinatensystem OXY.

### Symmetrie, Nullstellen, Polstellen und Asymptoten:

Da x nur mit gerader Potenz auftritt, gilt $f(-x) = f(x)$. $\Phi$ ist symmetrisch zur y-Achse.

Der Zähler ist konstant, also wird der Bruch für kein x Null: f hat keine Nullstellen.

Der Nenner hat keine Nullstelle: f hat keine Polstellen.

Interpretation für den Graf $\Phi$: $\Phi$ schneidet die x-Achse nicht und hat keine senkrechte Asymptote.

Grenzwert für $|x| \to \infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{8}{4+x^2} = 0$

Interpretation für den Graf $\Phi$: $\Phi$ hat die x-Achse als waagrechte Asymptoe.

### Extrem- und Wendepunkte:

<u>Ableitungen:</u> Zum Ableiten schreibt man die Funktionsgleichung um in $f(x) = 8\cdot\left(4+x^2\right)^{-1}$

Mit der Kettenregel: $f'(x) = -8\cdot\left(4+x^2\right)^{-2}\cdot 2x = -16\cdot\dfrac{x}{\left(4+x^2\right)^2}$

Mit der Quotientenregel $f''(x) = -16\cdot\dfrac{1\cdot\left(4+x^2\right)^2 - 2\left(4+x^2\right)\cdot 2x\cdot x}{\left(4+x^2\right)^4} = -16\cdot\dfrac{\left(4+x^2\right)^{\cancel{2}} - \cancel{\left(4+x^2\right)}\cdot 4x^2}{\left(4+x^2\right)^{\cancel{4}\,3}}$

$$= -16\cdot\frac{4-3x^2}{\left(4+x^2\right)^3}$$

<u>Extrempunkte</u>: Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

Hinreichende Bedingung: $f''(0) < 0 \;\Rightarrow$ Maximum.

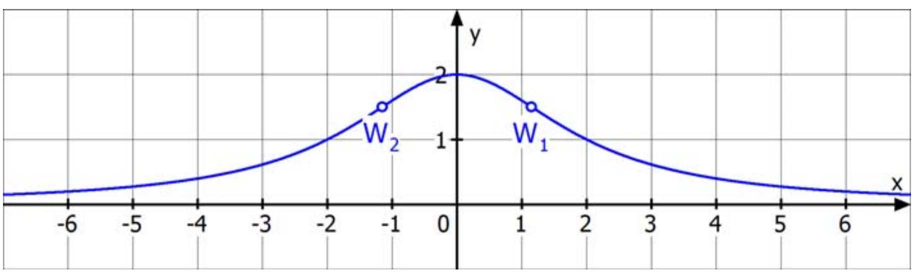
y-Koordinate: $f(0) = 2$ $H(0\,|\,2)$ ist also Hochpunkt von $\Phi$.

<u>Wendepunkte:</u> Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4-3x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = \tfrac{4}{3} \;\Leftrightarrow\; x_W = \pm\sqrt{\tfrac{4}{3}} = \pm\tfrac{2}{3}\sqrt{3}$

y-Koordinate: $f\left(\pm\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right) = \dfrac{8}{4+\frac{4}{3}} = \dfrac{8}{\frac{16}{3}} = \dfrac{8\cdot 3}{16} = \dfrac{3}{2}$

Hinreichende Bedingung: Da $f''$ zwei einfache Nullstellen hat, hat $f''$ dort auch Vorzeichenwechsel, d. h. $\Phi$ hat dort Krümmungswechsel.

Ergebnis: $W_{1,2}\left(\pm\tfrac{2}{3}\sqrt{3}\,|\,\tfrac{3}{2}\right) \approx (\pm 1{,}15\,|\,1{,}5)$ sind Wendepunkte von $\Phi$.



Geben Sie die Gleichungen der Tangenten an Φ in den Punkten P(-2;1) und Q(2;1) an.

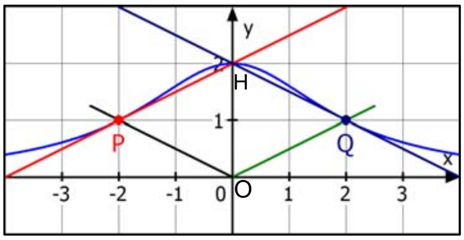
Steigung der Tangente in $P(-2\,|\,1)$: $m = f'(-2) = -16 \cdot \frac{-2}{(4+4)^2} = -16 \cdot \frac{-2}{64} = \frac{1}{2}$

Punkt-Steigungsform: $y - y_P = m(x - x_P) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x+2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$

Die Tangente in $Q(2\,|\,1)$ lautet auf Grund der Symmetrie: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

Betrachten Sie das konvexe Viereck, das diese Tangenten mit den Geraden OP und OQ bilden. Beweisen Sie, dass dieses Viereck ein Rhombus ist, und berechnen Sie die Größe seiner Winkel in Grad und Minuten (sexagesimale Darstellung).

**WISSEN:** Ein Viereck ist ein **Rhombus (Raute)**, wenn
(1) alle Gegenseiten parallel sind, oder wenn
(2) wenn Paar Gegenseiten parallel und gleich lang sind.




Hier ist (1) die einfachste Methode:

Die Tangente in P hat die Steigung $\frac{1}{2}$, dasselbe gilt für die Gerade OQ.
Die Tangente in Q hat die Steigung $-\frac{1}{2}$, dasselbe gilt für die Gerade OP.
Daher ist das Viereck ein Rhombus.

Zu Steigung $m = \frac{1}{2}$ gehört der Steigungswinkel $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26{,}565^\circ$
Damit folgt für den Innenwinkel bei O: $\beta = 180^\circ - 2\alpha \approx 126{,}87^\circ$
Genauso groß ist der Gegenwinkel im Hochpunkt H.
Die Winkel bei P und Q haben dann die Größe $\delta = 180 - \beta = 53{,}13^\circ$.

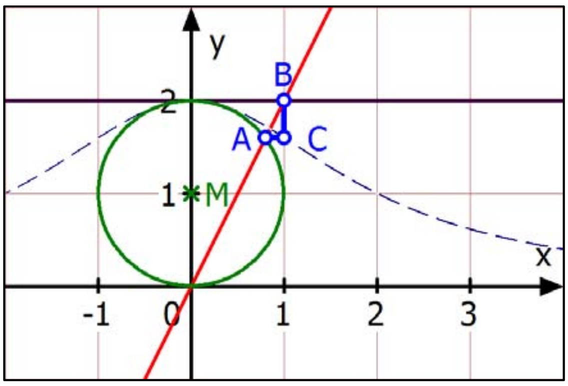
Umrechnung dieser Winkel in die sexagesimale Darstellung:

$$\beta = 126{,}87^\circ = 126^\circ 52'\,12''$$
$$\delta = 53^\circ 7'\,48''$$

| | |
|---|---|
| 0.87×60 | 52.2 |
| 0.2×60 | 12 |

2. Es sei Γ der Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt (0;1). Eine Gerade *t*, die durch den Ursprung *O* geht, schneidet Γ im Ursprung und in einem Punkt *A* und schneidet die Gerade mit der Gleichung y = 2 in einem Punkt *B*. Zeigen Sie, dass für jede Gerade *t* die Abszisse *x* von *B* und die Ordinate *y* von *A* die Koordinaten *(x;y)* eines Punktes von Φ sind.

Kreisgleichung: $x^2 + (y-1)^2 = 1$
Gerade t: $y = mx$
Schnittpunkte: $x^2 + (mx-1)^2 = 1$
$x^2 + m^2x^2 - 2mx + 1 = 1$
$(1+m^2)x^2 - 2mx = 0$
$x \cdot \left[(1+m^2)x - 2m\right] = 0$




Dieses Nullprodukt wird Null, wenn ein Faktor Null ist:

1. Faktor: $x = 0$ Das führt zum Ursprung, der hier nicht gesucht ist.

2. Faktor: $\left[\left(1+m^2\right)x - 2m\right] = 0$

$$\left(1+m^2\right)x = 2m \quad\Leftrightarrow\quad x_A = \frac{2m}{1+m^2} \quad \text{Also } A\left(\frac{2m}{1+m^2} \mid \frac{2m^2}{1+m^2}\right) \quad \text{denn } y_A = mx_A.$$

Berechnung des Schnittpunkts B mit der Geraden y = 2:

$$mx = 2 \quad\Rightarrow\quad x_B = \frac{2}{m} \qquad \text{Also ist } B\left(\frac{2}{m} \mid 2\right)$$

Gesucht ist nun der Punkt $C(x_B \mid y_A) = \left(\frac{2}{m} \mid \frac{2m^2}{1+m^2}\right)$

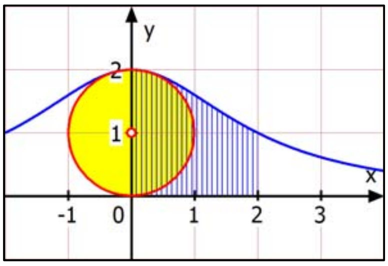
Zu zeigen ist: $C \in \Phi$

Punktprobe mit C: $f\left(\frac{2}{m}\right) = \frac{8}{4+\frac{4}{m^2}} \cdot \frac{m^2}{m^2} = \frac{8m^2}{4m^2+4} = \frac{2m^2}{m^2+1} = y_A$

(Zuerst wurde mit $m^2$ erweitert, dann durch 4 gekürzt.)

3. R sei der von $\Phi$ und der *x*-Achse über dem Intervall [0, 2] eingeschlossene ebene Bereich. Beweisen Sie, dass R flächengleich mit dem Kreis $\Gamma$ ist.

Zu berechnen ist: $A = \int_0^2 \frac{8}{4+x^2}\,dx$




**WISSEN:** $\boxed{\int_a^b \frac{1}{1+u^2}\,du = \left[\arctan(u)\right]_a^b}$

Zuvor kürzt man den Bruch zuerst durch 4 und führt dann eine Substitution durch:

$$A = \int_0^2 \frac{2}{1+\frac{x^2}{4}}\,dx = 2\cdot\int_0^2 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$$

Substitution: $u = \frac{x}{2} \quad\Rightarrow\quad du = \frac{1}{2}\cdot dx \quad\Leftrightarrow\quad dx = 2\cdot du$

Grenzen: $x = 0 \rightarrow u = 0, \quad x = 2 \rightarrow u = 1$

$$A = 4\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du = 4\cdot\left[\arctan(u)\right]_0^1 = 4\cdot\left[\arctan(1) - \arctan(0)\right]$$

Anleitung: Diese arctan-Werte kennt man, denn arctan ist die Umkehrfunktion von tan.

Man sollte **wissen**:

$$\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \arctan(1) = \tfrac{1}{4}\pi$$
$$\tan(0) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \arctan(0) = 0$$

Also: $A = 4\cdot\frac{1}{4}\pi \quad\Rightarrow\quad A = \pi \quad (FE)$

Kreisfläche: $A_{Kr} = \pi\cdot r^2 = \pi \quad (FE)$, denn r = 1.

Zeigen Sie außerdem, dass der von $\Phi$ und der gesamten *x*-Achse eingeschlossene Bereich äquivalent der vierfachen Kreisfläche ist.

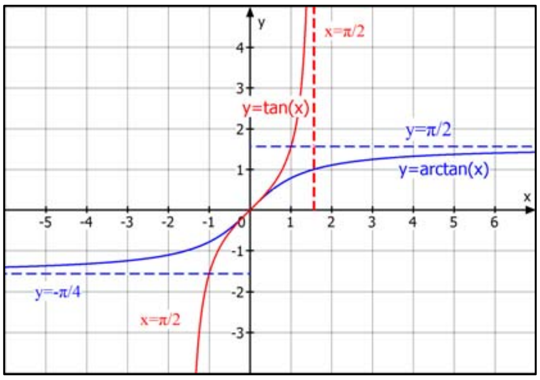
Dazu verwendet man zunächst eine variable rechte Grenze z > 0

$$A(z)=\int_0^z \frac{8}{4+x^2}dx = 4\int_0^{z/2}\frac{1}{1+u^2}du = 4\cdot\left[\arctan(u)\right]_0^{z/2} = 4\cdot\left[\arctan\left(\tfrac{z}{2}\right)-0\right]$$

**WISSEN:** Für $x \to \frac{1}{2}\pi$ gilt $\tan(x)\to\infty$:

Umgekehrt ist gilt also $y=\arctan(x)\to\frac{1}{2}\pi$, wenn $x\to\infty$ geht.

Also: $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan(x)=\frac{1}{2}\pi$




Folgerung: $\lim\limits_{z\to\infty}A(z)=4\cdot\frac{1}{2}\pi=2\pi$

Das war nun die halbe Fläche. Für die ganze Fläche folgt wegen der Symmetrie:

$A_{-\infty}^{\infty}=4\pi=4\cdot A_{Kreis}$

4. Der Bereich R erzeugt durch Rotation um die *y*-Achse einen Körper W. Geben Sie das bestimmte Integral an, mit dem das Volumen von W berechnet werden kann und begründen Sie es. Sie brauchen das Integral nicht berechnen!

Bei Drehung um die y-Achse gilt diese Formel: $V=\pi\int_{y_1}^{y_2}x^2dy$

Man benötigt also die Umkehrfunktion zu f:

$$y=\frac{8}{4+x^2} \quad\Leftrightarrow\quad 4+x^2=\frac{8}{y} \quad\Leftrightarrow\quad x^2=\frac{8}{y}-4=\frac{8-4y}{y}$$

Die zugehörigen Grenzen: Zu $x=2$ gehört $y=f(2)=\frac{8}{4+2^2}=1$

Zu $x=0$ gehört $y=f(0)=\frac{8}{4+0^2}=2$

$$V=\pi\int_{y_1}^{y_2}x^2dy=\pi\int_1^2\frac{8-4y}{y}dy=4\pi\int_1^2\frac{2-y}{y}dy$$

**Hinweis:** Dieses Integral musste in der Prüfung nicht berechnet werden. *Hier* die Berechnung;

$$\int_1^2\frac{2-y}{y}dy=\int_1^2\left(\frac{2}{y}-1\right)dy=\left[2\cdot\ln|y|-y\right]_1^2=\left[2\cdot\ln(2)-2\right]-\left[2\cdot\ln(1)-1\right]=2\cdot\ln(2)-1$$

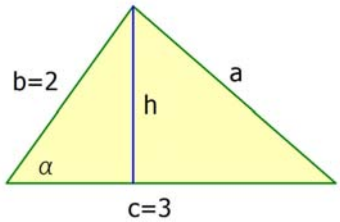
Daraus folgt: $V=4\pi\cdot(2\cdot\ln(2)-1)=(8\cdot\ln(2)-4)\pi\approx 5{,}85\ \ (VE)$

denn ln(1) = 0.

# Aufgabe 3 (10 Fragen)

1. Ein Dreieck hat Flächeninhalt 3 und zwei Seiten der Länge 2 und 3. Wie lang ist die dritte Seite? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung:**




In linken Teildreieck gilt:

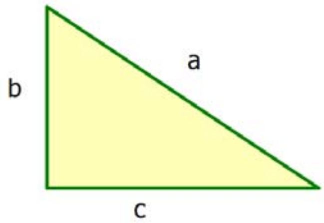
$\sin(\alpha) = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad h = b \cdot \sin(\alpha)$

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{c \cdot b \cdot \sin(\alpha)}{2}$

Setzt man die gegebenen Maße ein, folgt: $\frac{3 \cdot 2 \cdot \sin(\alpha)}{2} = 3$

Daraus folgt $\sin(\alpha) = 1$, also gilt $\alpha = 90^{\circ}$ bzw. im Bogenmaß $= \frac{1}{2}\pi$.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann:




$a^2 = b^2 + c^2 = 4 + 9 = 13$

$a = \sqrt{13}$

2. Berechnen Sie den Definitionsbereich der Funktion

$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$.

Für die innerste Wurzel gilt die Bedingung: $3 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3$

Für die mittlere Wurzel gilt die Bedingung: $2 - \sqrt{3 - x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3 - x} \leq 2$

Wissen: Das Quadrieren einer Ungleichung a < b ist für $a, b > 0$ ein monotoner Vorgang.

Also folgt: $3 - x \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$

Für die äußere Wurzel gilt die Bedingung: $1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \geq 0$ d. h. $\sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \leq 1$

Quadrieren liefert $2 - \sqrt{3 - x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3 - x} \geq 1$

Quadrieren liefert $3 - x \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2$

Insgesamt gilt also für den Definitionsbereich: $\underbrace{x \leq 3 \text{ und } x \leq 2}_{x \geq 2}$ und $x \geq -1$

Ergebnis: $\mathbf{D} = [-1; 2]$

3. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(2;-1) und B(-6;-8) gegeben. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die durch B geht und maximalen Abstand von A hat.

Damit A maximalen Abstand von einer Geraden g durch B hat, muss AB orthogonal zu dieser Geraden sein.

Man erkennt, dass der Abstand $\overline{AT}$ kleiner ist als $\overline{AB}$, denn die Gerade (AB) ist orthogonal zu $g_2$.

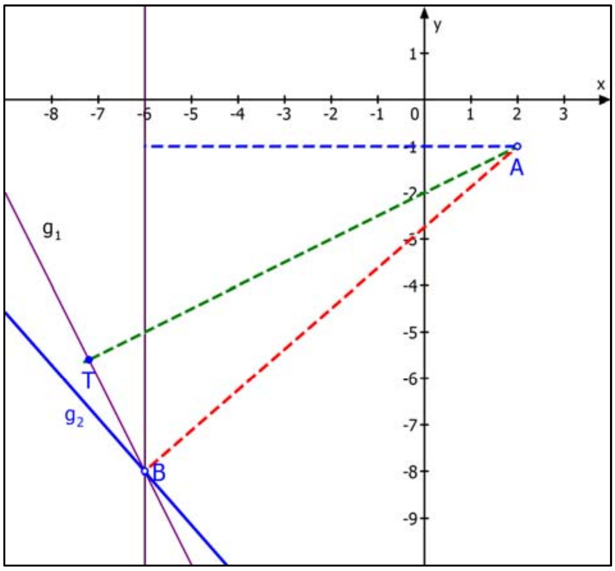
Steigung von AB: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7}{8} \Rightarrow m_{g2} = -\frac{8}{7}$

Punkt-Steigungsform für $g_2$ durch B:

$$y + 8 = -\frac{8}{7}(x+6) \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{8}{7}x - \frac{104}{7}}$$

Nicht verlangt ist der Abstand von $A(2|-1)$ und $B(-6|-8)$:

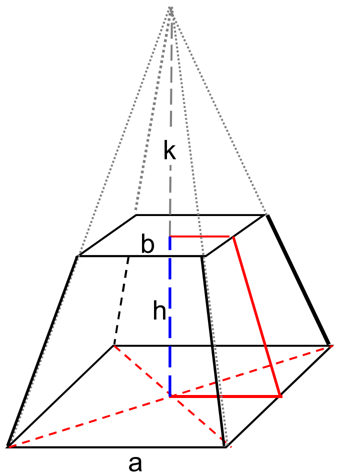
$$d = \overline{AB} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{64+49} = \sqrt{113} \quad (\text{LE})$$




4. Von einem geraden Pyramidenstumpf mit quadratischer Grundfläche kennt man die Höhe h und die Seiten a und b der Grund- und Deckfläche.
Drücken Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes in Abhängigkeit von a, b und h aus und legen Sie die angestellten Überlegungen dar.

**1. Lösung**

Man kann sich den Pyramidenstumpf erzeugt denken als Restkörper einer Pyramide der Grundseite a und der Höhe h+k, von der parallel zur Grundfläche eine Pyramide der Grundkante b und der Höhe k abgeschnitten wird.




Die vorauszusetzende Formel für das Volumen einer quadratischen Pyramide lautet:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot H$ G = Grundfläche, H = Höhe.

Für den Pyramidenstumpf folgt daraus:

$$V_{PSt} = \tfrac{1}{3}a^2 \cdot (h+k) - \tfrac{1}{3}b^2 \cdot k$$
$$V_{PSt} = \tfrac{1}{3}a^2 \cdot (h+k) - \tfrac{1}{3}b^2 \cdot k$$
$$V_{PSt} = \tfrac{1}{3}\left[a^2h + a^2k - b^2k\right]$$
$$V_{PSt} = \tfrac{1}{3}\left[a^2h + (a^2 - b^2)k\right]$$ Mit Hilfe der 3. binomischen Formel folgt
$$V_{PSt} = \tfrac{1}{3}\left[a^2h + (a+b)(a-b)k\right] \quad (1)$$

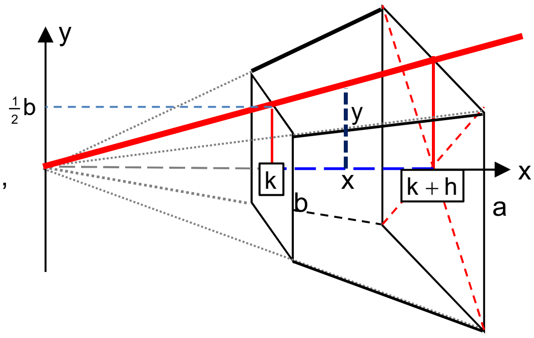
k lässt sich mit Hilfe der Strahlensätze eliminieren. Es gilt nämlich:

$$\frac{b}{a} = \frac{k}{h+k} \Leftrightarrow b(h+k) = ak \Leftrightarrow bh + bk = ak \Leftrightarrow ak - bk = bh \Leftrightarrow k(a-b) = bh \Leftrightarrow k = \frac{bh}{a-b}$$

In (1): $$V_{PSt} = \tfrac{1}{3}\left[a^2h + (a+b)\cancel{(a-b)} \cdot \frac{bh}{\cancel{a-b}}\right] = \tfrac{1}{3}\left[a^2h + (a+b)bh\right] \Rightarrow$$

$$V_{PSt} = \tfrac{1}{3}h \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

## 2. Lösung




Die *Integralrechnung* liefert eine andere Herleitung.
Zunächst muss man die Querschnittsfunktion q aufstellen, die für jede Stelle x den Inhalt des quadratischen Querschnitts angibt. Mit ihr berechnet man dann das

Volumen so: $V = \int_k^{k+h} q(x)\,dx$ .

Für die Querschnittsfunktion gilt: $q(k) = b^2$ und $q(k+h) = a^2$ .

Nur – wir benötigen einen Funktionsterm für q in Abhängigkeit von x !
Dazu betrachte man die dicke rote Gerade in der Abbildung. In der xy-Ebene hat sie als Ursprungsgerade die Gleichung $y = m\cdot x$. Ihre Steigung ist $m = \frac{\frac{1}{2}b}{k} = \frac{b}{2k}$. Also: $y = \frac{b}{2k}x$ .

Der Querschnitt an einer Stelle x wird berechnet durch $q(x) = (2y)^2$ ,
denn dort hat die Quadratseite die Länge 2y.

Ersetzt man y, folgt: $q(x) = \left(2\cdot\frac{b}{2k}x\right)^2 = \frac{b^2}{k^2}\cdot x^2$

**Achtung:** In der Volumenformel eines Pyramidenstumpfes kommt k nicht vor, sondern nur die Abmessungen a, b und h. Also muss man k ersetzen. Der 2. Strahlensatz hilft uns dabei:

$$\frac{\frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}a} = \frac{k}{k+h}, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{k}{k+h} \quad \Leftrightarrow \quad bk + bh = ak \quad \Leftrightarrow \quad bh = ak - bk = (a-b)k. \quad \text{Also folgt:} \quad k = \frac{bh}{a-b}$$

In der Integralformel steht auch noch k+h:

$$k + h = \frac{bh}{a-b} + h = \frac{bh}{a-b} + \frac{h(a-b)}{a-b} = \frac{bh + ah - bh}{a-b} = \frac{ah}{a-b}$$

Damit lautet die Querschnittsfunktion: $q(x) = \frac{b^2}{\frac{b^2\cdot h^2}{(a-b)^2}}\cdot x^2 = \frac{(a-b)^2}{h^2}\cdot x^2$

Für das Volumen folgt dann

$$V = \int_k^{k+h} q(x)\,dx = \int_{\frac{bh}{a-b}}^{\frac{ah}{a-b}} \frac{(a-b)^2}{h^2}\cdot x^2 = \frac{(a-b)^2}{h^2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{bh}{a-b}}^{\frac{ah}{a-b}} = \frac{(a-b)^2}{3h^2}\left[\frac{a^3h^3}{(a-b)^3} - \frac{b^3h^3}{(a-b)^3}\right] = \frac{h}{3}\cdot\left[\frac{a^3-b^3}{a-b}\right]$$

Es gibt eine wichtige, aber nicht häufig gebrauchte Formel: $a^3 - b^3 = (a-b)(a+ab+b^2)$,

deren Richtigkeit man durch Ausmultiplikation sofort erkennt.

Daraus ergibt sich: $\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$

Setzt man dies ein, erhält man das gesuchte Ergebnis:

$$V_{Kegelstumpf} = \frac{h}{3}\cdot\left[a^2 + ab + b^2\right].$$

5. In einem Buch steht: „Zwei Koffer der gleichen Form, deren Ausmaße sich nur geringfügig unterscheiden, scheinen 'fast das gleiche' Fassungsvermögen zu haben. Es ist fraglich, ob sich Personen bewusst sind, dass eine Vergrößerung der Ausmaße (Länge, Breite, Höhe) um 10% (oder 20% oder 25%) eine Vergrößerung des Fassungsvermögens (Volumens) um ungefähr 33% (oder 75% oder 100%: Verdoppelung) bewirkt.“
Ist dem so? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

**Lösung:**

**Wissen:** Die Vergrößerung einer Strecke a um p% erreicht man mit dem Faktor $1+\frac{p}{100}$

$a_p = a\cdot(1+\frac{p}{100})$

Neue Seite a: $a_p = a\cdot(1+\frac{p}{100})$

Neue Seite b: $b_p = b\cdot(1+\frac{p}{100})$

Neue Seite c: $c_p = c\cdot(1+\frac{p}{100})$

Neues Volumen: $V_p = a_p\cdot b_p\cdot c_p = a(1+\frac{p}{100})\cdot b(1+\frac{p}{100})\cdot c(1+\frac{p}{100}) = abc\cdot(1+\frac{p}{100})^3$

Anfangsvolumen: $V = abc$

Folgerung: $V_p = V\cdot(1+\frac{p}{100})^3$

1. Fall: Die Seiten a, b, c werden jeweils um 10% vergrößert.

$V' = \cdot V\cdot 1{,}1^3 = 1{,}331\cdot V$

Das bedeutet eine <u>absolute Zunahme</u> um $\Delta V = V' - V = 1{,}331\cdot V - V = 0{,}331\cdot V$

<u>Prozentuale Zunahme</u>: $p = \frac{\Delta V}{V}\cdot 100\% = \frac{0{,}331\cdot abc}{abc}\cdot 100\% = 33{,}1\%$

Das sind etwa 33%

2. Fall: Vergrößerung der Seiten um 20 %.

Neues Volumen: $V'' = 1{,}2^3\cdot V = 1{,}728\cdot V$

Absolute Zunahme: $\Delta V = V'' - V = 0{,}728\cdot abc$

Prozentuale Zunahme: $p = \frac{\Delta V}{V}\cdot 100\% = \frac{0{,}728\cdot abc}{abc}\cdot 100\% = 72{,}8\%$

Dies sind fast 75%.

3. Fall: Vergrößerung der Seiten um 24 %.

Neues Volumen: $V''' = 1{,}25^3\cdot V \approx 1{,}953\cdot V$

Absolute Zunahme: $\Delta V = V''' - V = 0{,}953\cdot abc$

Prozentuale Zunahme: $p = \frac{\Delta V}{V}\cdot 100\% = \frac{0{,}953\cdot abc}{abc}\cdot 100\% = 95{,}3\%$

Dis sind fast 100%, also nahezu eine Verdoppelung.

6. Mit den Ziffern von 1 bis 7 ist es möglich 7! = 5040 verschiedene Zahlen zu bilden. Dies entspricht der Anzahl der Permutationen der 7 Ziffern, die beiden Zahlen 1234567 und 3546712 sind zwei Beispiele dieser Permutationen. Wenn man die 5040 erhaltenen Zahlen der Größe nach aufsteigend ordnet, welche Zahl steht dann an der siebten und welche an der 721. Stelle?

Man schreibe sich zuerst einmal die bersten 7 dieser Zahlen auf, beginnend mit der kleinstmöglichen:

1234**5**67 – 1234**5**76 –
1234**6**57 – 1234**6**75 – Zu den Vorziffern 1234 gibt es 3! = 6 Zahlen mit den Endziffern 567.
1234**7**56 – 1234**7**65 –
*123**5***467 – *123**5***467

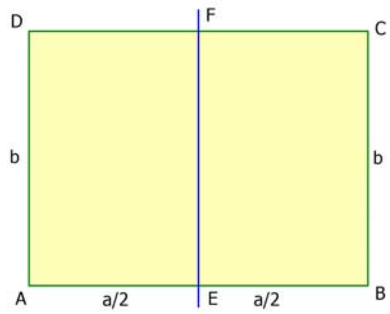
Die 7. Zahl ist *123**5***467.

Die 721. Zahl ist nun gefragt. Zuvor sind 720 = 6! Zahlen.
Hält man die erste Ziffer 1 fest, dann folgen noch 6 Ziffern 123456, die man permutieren kann.
Das ergibt dann genau die ersten 720 Zahlen der Zahlenfolge. Die nächste, also 721. Zahl der Folge muss daher mit der Zahl 2 beginnen und muss die kleinste Zahl dieser Art sein.

Man erhält **2**134567 als 721. Zahl.

7. Ein rechteckiges Blatt mit den Maßen a und b hat eine Fläche von 1 m$^2$. Halbiert man das Blatt indem man es parallel zur kürzeren Seite teilt, so erhält man zwei, zum Ausgangsrechteck ähnliche Rechtecke. Welches sind die Maße a und b?

Bedingung laut Aufgabe: $a \cdot b = 1$ (1)




Die Teilrechtecke sollen zum Ausgangsrechteck ähnlich sein.

Also gilt: $\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}a^2 = b^2$ (2)

Aus (1): $a = \frac{1}{b}$ in (2): $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b^2} = b^2 \Leftrightarrow b^4 = \frac{1}{2}$

$b = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

Also: $a = \frac{1}{b} = \sqrt[4]{2}$

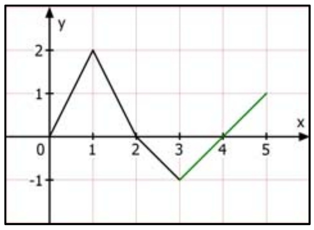
Hinweis: Dieses Prinzip liegt den DIN-A Maßen zugrunde.
Man beginnt bei $a = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}189\text{ m} = 1189\text{ mm}$ und $b = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 0{,}841\text{ m} = 841\text{ mm}$
und nennt diese Blattgröße DIN A0.

Durch fortgesetzte Halbierung der jeweils längeren Seite entsteht DIN A1, DIN A2 usw. bis zu DIN A4 mit a = 297 mm und b = 210 mm. usw.

8. Die Funktion f hat den in der nebenstehenden Abbildung dargestellten Graf.

Es sei $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

Für welchen positiven Wert von x besitzt g ein Minimum? Legen Sie die angestellten Überlegungen dar.




**Lösung:**
$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{für } 0\le x\le 1 \\ 4-2x & \text{für } 1\le x\le 2 \\ 2-x & \text{für } 2\le x\le 3 \\ x-4 & \text{für } 3\le x\le 5 \end{cases}$$

$$g_1(x)=\int_0^x 2t\,dt=\left[t^2\right]_0^x=x^2$$

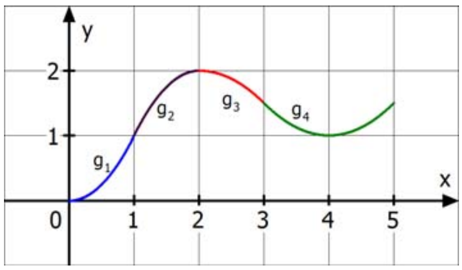
$$g_2(x)=\underbrace{\int_0^1 2x\,dx}_{g(1)}+\int_1^x(4-2t)\,dt=1+\left[4t-t^2\right]_1^x=1+4x-x^2-3=-x^2+4x-2$$

$$g_3(x)=\underbrace{\int_0^2 f(t)\,dt}_{g(2)}+\int_2^x(2-t)\,dt=2+\left[2t-\tfrac{1}{2}t^2\right]_2^x=2+2x-\tfrac{1}{2}x^2-2=-\tfrac{1}{2}x^2+2x$$

$$g_4(x)=\underbrace{\int_0^3 f(t)\,dt}_{g(3)}+\int_3^x(t-4)\,dt=1{,}5+\left[\tfrac{1}{2}t^2-4t\right]_3^x=1{,}5+\tfrac{1}{2}x^2-4x-(4{,}5-12)=\tfrac{1}{2}x^2-4x+9$$

Zusammengesetzt:

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{für } 0\le x\le 1 \\ -x^2+4x-2 & \text{für } 1\le x\le 2 \\ -\tfrac{1}{2}x^2+2x & \text{für } 2\le x\le 3 \\ \tfrac{1}{2}x^2-4x+9 & \text{für } 3\le x\le 5 \end{cases}$$




Das absolute Minimum liegt bei x =0.

**Geometrische Begründung:** (Damit wird die oben gezeigte Berechnung von g überflüssig.)

Die erste Teilfunktion $g_1$ stellt die wachsende Fläche unter der Geraden y = 2x dar.

Der Flächeninhalt wächst von g(0) = 0 bis zum Dreiecksinhalt $g_1(1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$.

Für 1 < x < 2 wächst die Gesamtfläche weiter bis zum Maximalwert $g_2(2)=1+1=2$ (beide Dreiecke haben den Inhalt 1).

Dann nimmt die Fläche von x = 2 bis x = 4 ab, weil Flächenstücke unterhalb der x-Achse durch die Integration negative Werfte bekommen. Das ganze unter der x-Achse befindliche Dreieck hat den Wert $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$. Daher nimmt g von 2 bis auf 1 ab: g(4) = 1. Hier liegt ein Minimum, denn ab da nimmt g(x) wieder zu, weil Flächenstücke dazu kommen, die über der x-Achse liegen. So wird klar, dass g das absolute Minimum bei x = 0 besitzt. Der erste positive x-Wert für ein Minimum ist dann x = 4: $T(4\,|\,1)$.

9. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} 4\dfrac{\sin(x)\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$

**1. Lösung:** Hier liegt der Fall „$\frac{0}{0}$“ vor, den man mit der Regel von de l'Hospital untersuchen kann:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\cos(x)-\sin(x)}{x^2} \overset{*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)-\cos(x)}{2x} \overset{*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2\cdot\sin(x)-\cos(x)}{2}$$

$$=\lim_{x\to 0}4\frac{\cos x-2\cdot\sin(x)-\cos(x)}{2}=4\cdot\frac{1-2\cdot 0-1}{2}=0$$

*) bedeutet: Zähler und Nenner getrennt ableiten.

**2. Lösung:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)\cos(x)-\sin(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)\left(\cos(x)-1\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin(x)}{x}\cdot\dfrac{\cos(x)-1}{x}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} \qquad (*)$$

Für diese Aufgabe benötig man als **Vorkenntnis** der eigentlich in jedem Unterricht behandelte erste Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.

Den 2. Grenzwert berechnet man mit einem Erweiterungstrick:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\cos(x)-1\right]\left[\cos(x)+1\right]}{x\cdot\left[\cos(x)+1\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-1}{x\cdot\left(\cos(x)+1\right)}$$

Der trigonometrische Pythagoras lautet: $\sin^2(x)+\cos^3(x)=1 \iff \cos^3(x)-1=-\sin^2(x)$

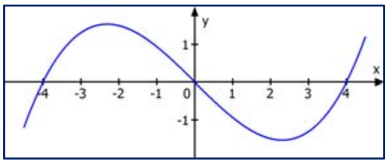
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2(x)}{x\cdot\left(\cos(x)+1\right)}=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}\right]=-\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}}_{\frac{0}{2}=0}=-1\cdot 0=0$$

Damit lautet das Ergebnis zu (*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)\cos(x)-\sin(x)}{x^2}=0$

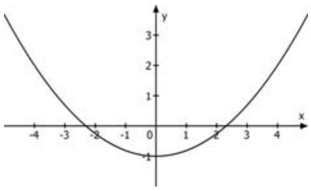
Und folglich auch $\lim\limits_{x\to 0}4\dfrac{\sin(x)\cos(x)-\sin(x)}{x^2}=0$

10. Nebenstehende Abbildung stellt den Graf von f(x) dar.

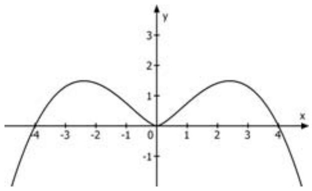
Welchen der folgenden Grafen könnte jener von $f'(x)$ sein?
Begründen Sie Ihre Antwort.



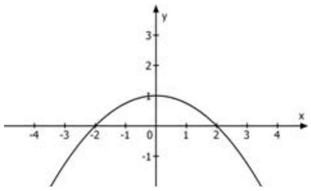
A)



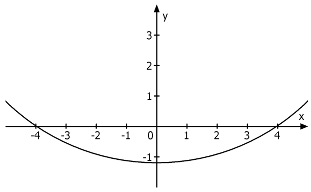
C)



B)



D)



**Lösung:**

Es kann sich nur um A) handeln.

Begründung:

Der Graf von f hat bei $x \approx \pm 2{,}3$ waagrechte Tangenten, also gilt $f'(\pm 2{,}3) \approx 0$.
Das trifft bei A und B zu. Im Ursprung fällt die Kurve, d. h. die Tangentensteigung ist dort negativ. $f'(0) < 0$ trifft bei A und D zu. Beides wird nur in A erfüllt-

Sessione ordinaria 2013
Seconda prova scritta

*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

# M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

**Indirizzo:** SCIENTIFICO

**Tema di:** MATEMATICA

***Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.***

## PROBLEMA 1

La funzione $f$ è definita da $f(x)=\int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt$ per tutti i numeri reali $x$ appartenenti all'intervallo chiuso $[0,9]$.

1. Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$ ove $f'$ indica la derivata di $f$.
2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico $\Sigma$ di $f'(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di $x$, $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$.
3. Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0,2\pi]$.
4. Sia R la regione del piano delimitata da $\Sigma$ e dall'asse $x$ per $0 \le x \le 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse $x$ hanno, per ciascun $x$, area $A(x)=3\,sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

   Si calcoli il volume di W.

## PROBLEMA 2

Sia $f$ la funzione definita, per tutti gli $x$ reali, da $f(x)=\frac{8}{4+x^2}$

1. Si studi $f$ e se ne disegni il grafico $\Phi$ in un sistema di coordinate cartesiane $Oxy$. Si scrivano le equazioni delle tangenti a $\Phi$ nei punti $P(-2;1)$ e $Q(2;1)$ e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette $OP$ e $OQ$. Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli.
2. Sia $\Gamma$ la circonferenza di raggio 1 e centro $(0;1)$. Una retta $t$, per l'origine degli assi, taglia $\Gamma$ oltre che in O in un punto A e taglia la retta d'equazione $y=2$ in un punto B. Si provi che, qualunque sia $t$, l'ascissa $x$ di B e l'ordinata $y$ di A sono le coordinate $(x;\mathrm{y})$ di un punto di $\Phi$.
3. Si consideri la regione R compresa tra $\Phi$ e l'asse $x$ sull'intervallo $[0,2]$. Si provi che R è equivalente al cerchio delimitato da $\Gamma$ e si provi altresì che la regione compresa tra $\Phi$ e tutto l'asse $x$ è equivalente a quattro volte il cerchio.
4. La regione R, ruotando attorno all'asse $y$, genera il solido W. Si scriva, spiegandone il perchè, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W.

Sessione ordinaria 2013
Seconda prova scritta

*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

**M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

CORSO DI ORDINAMENTO

**Indirizzo:** SCIENTIFICO

**Tema di:** MATEMATICA

**QUESTIONARIO**

1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.

2. Si calcoli il dominio della funzione

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}}$$

3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2;-1)$ e $B(-6;-8)$. Si determini l'equazione della retta passante per $B$ e avente distanza massima da $A$.

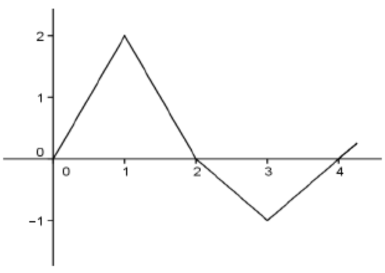
4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza $h$ e i lati $a$ e $b$ delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di *a, b* e *h*, illustrando il ragionamento seguito.

5. In un libro si legge: "*Due valigie della stessa forma sembrano "quasi uguali", quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondono aumenti di capacità (volume) di circa 33% (oppure 75% o 100% : raddoppio)*". È così? Si motivi esaurientemente la risposta.

6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7!=5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione?

7. Un foglio rettangolare, di dimensioni $a$ e $b$, ha area $1\,m^2$ e forma tale che, tagliandolo a metà (parallelamente al lato minore) si ottengono due rettangoli simili a quello di partenza. Quali sono le misure di $a$ e $b$?

8. La funzione $f$ ha il grafico in figura. Se $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, per quale valore positivo di $x$, $g$ ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.




9. Si calcoli:

$$\lim_{x\to 0} 4\,\frac{\operatorname{sen}x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^2}$$

Pag. 3/3

Sessione ordinaria 2013
Seconda prova scritta

*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

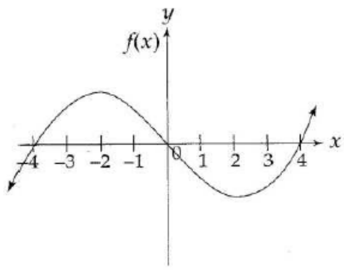
**M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

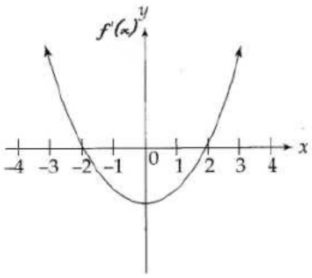
CORSO DI ORDINAMENTO

**Indirizzo:** SCIENTIFICO

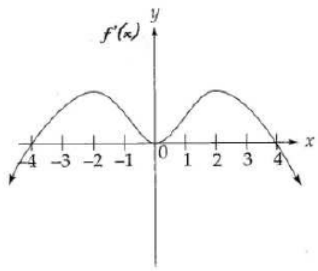
**Tema di:** MATEMATICA

10. Se la figura a lato rappresenta il grafico di $f(x)$, quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di $f'(x)$? Si giustifichi la risposta.

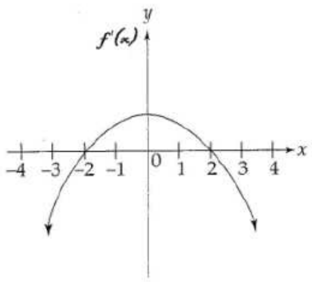


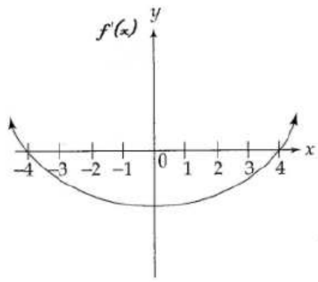

A)




C)




B)




D)

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.